

#Φωλιόδιο Β, άσκηση 5)

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Θεωρούμε $B = A^t A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Δείξτε: i) B συμμετρικός, από διαγωνισμός

ενι του $\mathbb{R}$.

ii) Κάθε ιδιοτιμή του B στο $\mathbb{C}$ είναι πραγματικός ≥ 0 .

iii) B θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow A$ αντιστρέψιμος.

Λύση

i) $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$, Άρα ο B συμμετρικός
 και από $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο B είναι διαγωνισμός
 ενι του $\mathbb{R}$.

ii) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του B , και ο B
 είναι συμμετρικός, $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή
 του B . Άρα υπάρχει $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ km ληθευτικός
 με $B \cdot v = \lambda \cdot v$

Άρα $v^t B v = \lambda v^t \cdot v \Rightarrow v^t A^t A v = \lambda v^t \cdot v \Rightarrow$

$\langle A v, A v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$, όπου $\langle \rangle$ το εσωτ.

(κανονικό) γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n \times 1}$

(για $v, w \in \mathbb{R}^{n \times 1} \Rightarrow \langle v, w \rangle = \text{Tr}(w^t v) \in \mathbb{R}$)

Αλλά $\langle v, v \rangle \geq 0$, γιατί $v \neq (0)_{n \times 1}$ και

$\langle A v, A v \rangle \geq 0$.

Άρα $\langle A v, A v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle \Rightarrow \lambda \geq 0$.

iii) Ισχυρίστος 1: Ο B θετικά ορισμένος $\Rightarrow A$ οντιστρέτιλος.

απόδειξη.

Έστω A όχι οντιστρέτιλος. Τότε $\exists v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ lm μηδενικό $\text{w.t. } Av = 0_{n \times 1}$. Άρα $\text{Tr}(v^t B v) = \text{Tr}(v^t A^t A v) = \langle Av, Av \rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Αντιφασμα, αφού B θετικά ορισμένος και $v \neq 0_{n \times 1}$.

Βήμα 2ος

Υποθέτω ότι A όχι οντιστρέτιλος. Τότε $B = A^t A \Rightarrow \det B = \det(A^t A) = \det(A^t) \cdot \det(A) = 0_{\mathbb{R}}$,

γιατί $\det(A) = 0$, αφού A όχι οντιστρέτιλος. Αντιφασμα, γιατί B θετικά ορισμένος από θεώρημα $\Delta n = \det B > 0$.

Ισχυρίστος 2: A οντιστρέτιλος $\Rightarrow B$ θετικά ορισμένος. Έστω $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ lm μηδενικό.

Αρκεί $v \neq 0$ $\text{Tr}(v^t B v) > 0$.

$$\text{Tr}(v^t B v) = \text{Tr}(v^t A^t A v) = \langle Av, Av \rangle > 0.$$

γιατί ο A οντιστρέτιλος, $\forall v \neq 0_{n \times 1} \Rightarrow Av \neq 0_{n \times 1}$.

NO

DATE

#Φωκίδιο 8, Αβρ. 8)

Βήμα 1ο: Εστω $A = \text{nivouon Tms}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Οι ρίζες τα $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

Βήμα 2ο: Υπολογίστε ορθογώνια nivouon

P ώστε:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Οπότε ως πότες

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Βήμα 3ο: Γράψετε $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, όπου z_1, z_2 νέες μεταβλητές.

$$\text{Άρα } \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{bmatrix}$$

NO DATE

Από θεωρία $Q(2, 22) = 2 \cdot 2^2 + 22 \cdot 2^2$
 $= 2^2 - 22^2$

$$Q(x, y) = 21 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y \right)^2 + 22 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y \right)^2$$

Αρα $P(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y$

$$Q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{2}} y$$

Άσκηση 1, φύλλο 8.)

α) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και 3 ιδιοτιμές του A .
 Δείξτε ότι το 15 είναι ιδιοτιμή του $9A^2 - 3I_n$

Λύση

(*) Υποθέτουμε: λ ιδιοτιμή του $A \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $v \neq 0$ με $Av = \lambda v$.

Αφού 3 ιδιοτιμές του A , $\exists v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ με $v \neq 0$ με $Av = 3v \Rightarrow$

$$\Rightarrow A^2 v = A \cdot Av = A(3v) = 3Av = 3(3v) = 9v$$

Αρα $(9A^2 - 3I_n)v = 9A^2 v - 3v = 9 \cdot 9v - 3v = (81 - 3)v = (78)v$

Το αποτέλεσμα είναι

Πιο γενικά με τα ίδια επιχειρήματα

για $n \geq 1$: $A^n = \lambda^n \cdot v$. Οπότε αν

$$\phi(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r \in \mathbb{R}[x] \text{ και } \lambda$$

ιδιοτιμή του A τότε έχουμε ότι:

$$\phi(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_r \lambda^r \text{ είναι ιδιοτ. του } \phi(A)$$

$$\phi(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_r A^r \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

NO

DATE

B) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $A^2 = 4I$
 Τι γνωρίζετε για το $m_A(x)$, $\chi_A(x)$; είναι
 ο A διαγωνίσιμος;

Λύση

Έστω $f(x) = x^2 - 4 \in \mathbb{R}[x]$, ομα $f(x) = (x-2)(x+2)$
 Από υπόθεση $f(A) = \mathbf{0}_{n \times n}$.

Αρα το $m_A(x)$ διαιρεί το $f(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$

Τρεις περιπτώσεις:

- i) $m_A(x) = (x-2)$ (αρα $A = 2I_n$)
- ii) $m_A(x) = (x+2)$ (αρα $A = -2I_n$)
- iii) $m_A(x) = (x+2)(x-2) = f(x)$

Παρατηρούμε λοιπόν $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Αρα αφού το $m_A(x)$ διαιρεί το $\chi_A(x)$
 στο $\mathbb{R}[x]$ υπάρχουν μοναδικά $a, b \in \mathbb{Z}$
 με $a, b \geq 0$, με $a+b=n$ ώστε:

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x-2)^a (x+2)^b$$

Παραβέ ότι ο A διαγωνίζεται (επ' του $\mathbb{R}$)

Εί το $m_A(x)$ γραφεται ως γινόμενο

διακεκρινένων πρωτοβάθμιων. Αυτό ισχύει

αρα ο A διαγωνίσιμος.

Χρήσιμη! Υπάρχει ο A να τον είναι

διagonalis

π.χ. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Φύλλο 8. Άσκηση 9)

Παρατήρηση: Αν $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

η πιο γενικά $\begin{bmatrix} \lambda & \dots & 1 \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$ τότε ο πίνακας

αυτός δεν είναι διαγωνίσιμος.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε να $\exists \alpha, b \in \mathbb{R}$ με

$$A^2 + \alpha A + bI_n = \mathbf{0}_{n \times n}$$

Δείξτε ότι: i) Εάν $\alpha^2 - 4b > 0$ τότε ο A διαγωνίσιμος $\mathbb{R}$.

ii) Εάν $\alpha^2 - 4b < 0$, τότε ο A όχι διαγ. επί του $\mathbb{R}$.

iii) Εάν $\alpha^2 - 4b = 0$, τότε ο A διαγ. $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow A = -\frac{\alpha}{2}I_n$.

iv) Δείξτε ότι αν $b \neq 0$, τότε ο A αντιστ.

Βρείτε τον A^{-1} .

Λύση

Έστω $f(x) = x^2 + \alpha x + b \in \mathbb{R}[x]$. Από υπόθεση $f(A) = \mathbf{0}_{n \times n}$. Από το $m_A(x)$ διαιρεί το $f(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$.

Περίπτωση 1) $\alpha^2 - 4b > 0$. Τότε $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ώστε: $f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

Συνεπώς $m_A(x) \in \{x - \lambda_1, x - \lambda_2, (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\}$.

Σε κάθε περίπτωση, $m_A(x)$ γινόμενο στο $\mathbb{R}[x]$ διακεκρ. γραμμ. $\Rightarrow A$ διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

Περίπτωση 2: $a^2 - 4b < 0$. Τότε το $f(x)$
 αναγράφεται στο $\mathbb{R}[x] \Rightarrow m_A(x) = f(x)$.

Συνεπώς το $m_A(x)$ αναγράφεται βαθμιά 2
 στο $\mathbb{R}[x]$. Από εδώ φαίνεται πως πρέπει
 διακριτ. πρωτοβαθμικών. Από Α όχι διαγωνίσιμος
 επί του $\mathbb{R}$.

(Παρατήρηση: Η ερώτηση $a^2 - 4b = 0$ μας
 λέει ότι το $f(x)$ έχει 2 διακριτ. ρίζες
 στο $\mathbb{C}$ Από Α διαγ. / $\mathbb{C}$)

Περίπτωση 3: Υποθέτουμε $b^2 - 4a = 0$.
 Τότε $f(x) = (x + \frac{a}{b})^2$.

Από $m_A(x)$ διαιρεί το $f(x)$ έχουμε
 $m_A(x) = x + \frac{a}{b} \Rightarrow A$ διαγωνίσιμος.

$$\text{υπάρχει } A + \frac{a}{b} I_n = 0_{n \times n} \Rightarrow A = -\frac{a}{b} I_n$$

$m_A(x) = (x + \frac{a}{b})^2$ υπάρχει Α όχι διαγωνίσιμος.

iv) Υποθέτουμε $b \neq 0$. (χουμε $A^3 + a \cdot A + b \cdot I_n = 0$
 $\Rightarrow A^3 + 0 \cdot A = -b I_n \Rightarrow (\frac{1}{b})^3 A + (-\frac{a}{b}) A = I_n$

$$\Rightarrow A (-\frac{1}{b} A - \frac{a}{b} I_n) = I_n \quad \underline{\underline{\text{υπάρχει}}}$$

$$(-\frac{1}{b} A - \frac{a}{b} I_n) A = I_n$$

Συνεπώς Α αντιστρέφεται υπάρχει $A^{-1} = -\frac{1}{b} A - \frac{a}{b} I_n$.

NO

DATE

#Φυλλάδιο 8, Αβρ. 19

Είναι 0 πιθανός

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Θα είναι
ορισμένος;

$$\Delta_1 = 430$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

, Άρα 0 B όχι θα είναι
ορισμένος.